博客园 cnblogs.com
首页 新闻 博问 专区 闪存 班级 代码改变世界 注册 登录

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

导航
博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

< 2022年3月 >

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告
你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”

昵称： 我是8位的
园龄： 4年7个月
粉丝： 288
关注： 5
+加关注

搜索
找找看
谷歌搜索

常用链接
我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名
积分 - 457097
排名 - 1198

单变量微积分笔记5——导数5（指数函数和对数函数的导数）

指数函数的性质

先来复习一下中学的课程：

$$a^{m+n}=a^m\cdot a^n\,(a>0,\ m,n\in\mathrm{R})$$

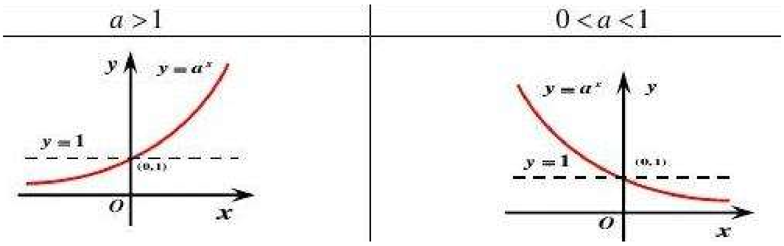
$$a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}\,(a>0,\ m,n\in\mathrm{R})$$

$$(a^m)^n=a^{mn}\,(a>0,\ m,n\in\mathrm{R})$$

$$(ab)^n=a^nb^n\,(a,b>0,\ n\in\mathrm{R})$$

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\,(a>0,\ m,n\in\mathrm{N},\ n>1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\,(a>0,\ m,n\in\mathrm{N},\ n>1)$$



指数函数的导数

对f(x) = a^x求导：

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

a^x右侧的那个极限似乎没有办法继续简化了，如果这个极限看作关于a的函数（之所以将极限看作关于a的函数，是因为在这个极限中，a是未知的，Δx是已知的）：

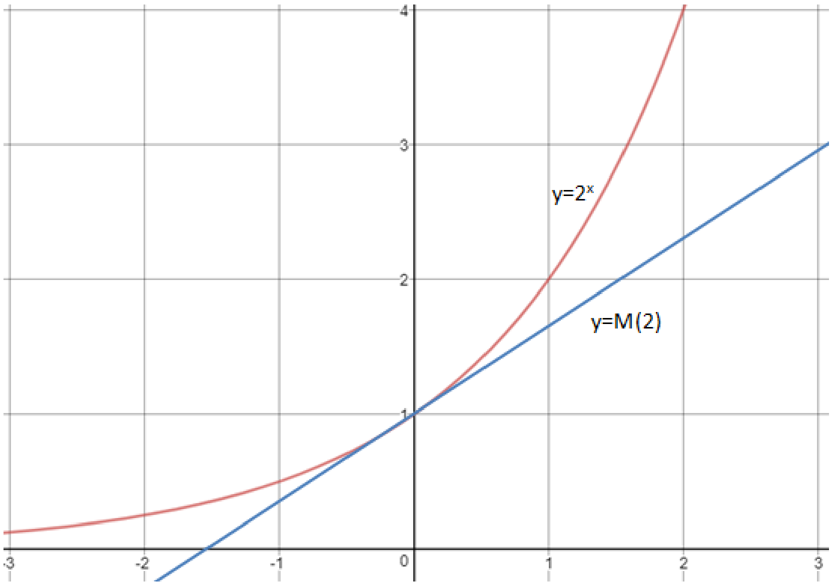
$$M(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x},\ 则\ \frac{dy}{dx}=a^xM(a)\qquad (1)$$

当 x=0 时，

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=a^0M(a)=M(a)\qquad (2)$$

函数在某一点导数的几何意义是该点处切线的斜率，所以M(a)也就是ax在x=0处切线的斜率。

如果y=2^x，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}2^x|_{x=0}=M(2)$，我们仍不知道M(a)是什么，暂且作为悬念。

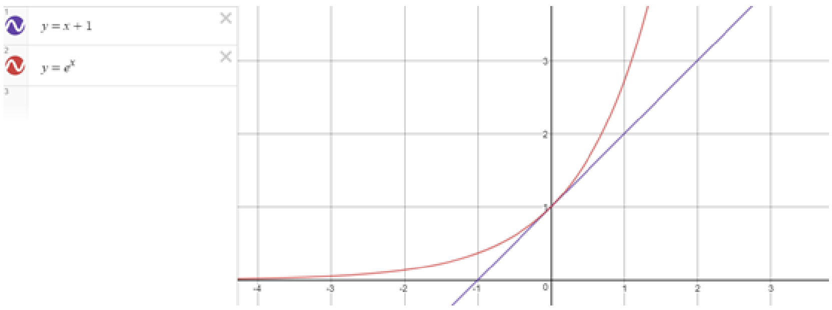


e

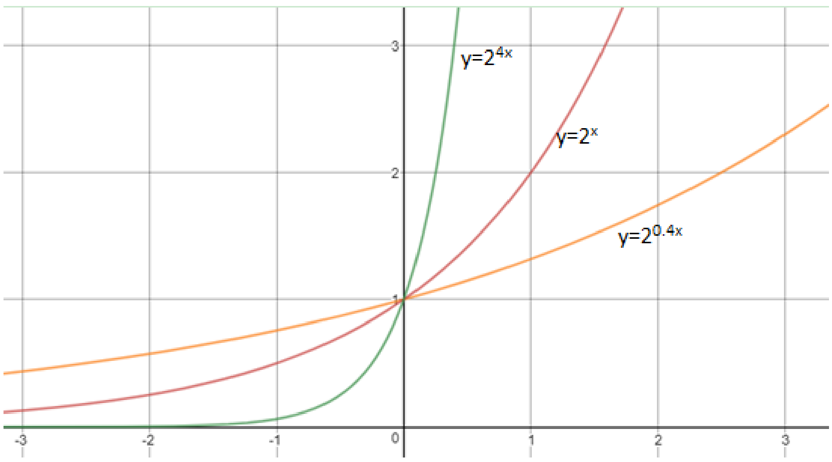
我们知道e表示自然对数的底数，暂且不管自然对数到底是什么，只知道它确实存在。e有两个性质：

1) $(e^x)' = e^x$

2) e^x在x=0的导数是1



当我们想要继续对$f(kx)=2^{kx}$，k∈R求导时，根据上节的公式（2），$\frac{d}{dx}2^{kx}|_{x=0} = M(2^k)$，这并没有解决问题，看起来更复杂了。如果已知函数某一点的导数，就能求得该函数压缩或伸展后在该点的导数，2^{kx}仅仅是2^x的压缩或伸展，在x=0处的斜率也不断向左或向右倾斜：



2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系

--trustInU

对 $f(kx) = 2^{kx}$ 求导，令 $b = 2^k$，则 $f(kx) = b^x$；根据链式求导法则，$u = kx, y = 2^u$

$$\frac{db^x}{dx} = \frac{df(kx)}{dx} = (kx)'(2^u)' = k(2^u)'$$

根据上节的公式 (1)，$(2^u)' = 2^u M(2) = 2^{kx}M(2)$，代入得：

$$\frac{db^x}{dx} = k2^{kx}M(2)$$

$$\frac{db^x}{dx}|_{x=0} = k2^{k\times 0}M(2) = kM(2)$$

当k=1/M(2)时，(b^x)在x=0处的导数是1，b = e，虽然暂时不知道它的值，但已经知道它确实存在。

对数的性质

性质一 $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

性质二 $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

性质三 $\log_a a^M = M$

性质四 $a^{\log_a M} = M$

延伸 $a^{\log_a M} = \log_a a^M$

性质五 $\log_a M^N = N\log_a M$

性质六 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\lg b}{\lg a}$ 对数的换底性质

性质七 $\log_{a^M} b^N = \frac{N}{M}\log_a b$

性质八 $\log_{\frac{1}{a}} b = \log_a \frac{1}{b}$ 延伸 $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_a b$

（1）常用对数：$\lg(b)=\log_{10}b$（10为底数）

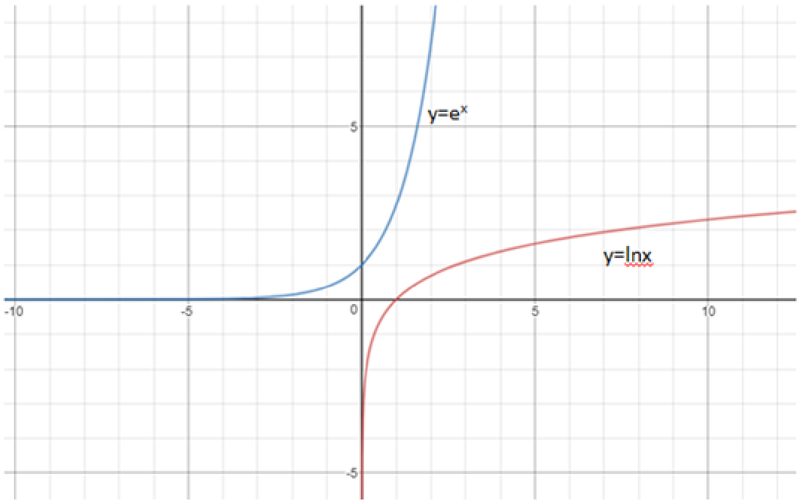
（2）自然对数：$\ln(b)=\log_e b$（e为底数）

自然对数的导数

自然对数是以e为底的对数，简写做ln

$\ln 1 = 0$，$\ln e = 1$

y=lne和$y=e^x$互为反函数：



lnx求导

对于函数y = lnx，其反函数是e^y = x，根据反函数微分法：

$$\frac{de^y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=x'$$

$$e^y\cdot\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{lnx}}=\frac{1}{x}$$

M(a)的真相

已经做了足够多的准备工作，是时候揭开M(a)的真相了。

在对指数函数y=a^x求导时，我们得出(a^x)′ =a^xM(a)。根据对数的性质，$e^{\ln a}$ = a，原函数需要使用对数进行一次变换：

$$a^x=(e^{lna})^x=e^{xlna}$$

$$(a^x)'=(e^{xlna})'=a^xM(a)$$

根据链式求导法则，

$$(e^{xlna})'=\frac{de^{xlna}}{d(xlna)}\cdot\frac{d(xlna)}{dx}=e^u(lna)=e^{xlna}(lna)=a^x(lna)$$

所以，M(a) = ln(a)

指数函数的求导公式

由于已经知道了M(a)，所以我们终于可以完成对指数函数的求导了。

对数函数求导公式：(a^x)′ = a^xlna

示例：

(10^x)′ = 10^xln10，(2^x)′ = 2^x ln2

对数微分法

自然对数求导公式：(lnu)′ = u′ /u，u是x的函数

根据该公式，(lnx)′ = x′ /x = 1/x

示例1：(lnx)′ = x′ /x = 1/x

示例2：($\ln a^x$)′ = (a^x)′ / a^x = (a^x lna) / a^x = lna

示例3：(x^x)′

这个稍微复杂点，不能直接用指数函数求导法则，因为指数也是x，此时需要使用对数做一次转换。

$$y = x^x => lny = lnx^x = xlnx$$

$$(lny)' = (x(lnx))'$$

$$\frac{y'}{y} = x'lnx + x(lnx)' = lnx + x\left(\frac{1}{x}\right) = lnx + 1$$

$$y' = y(lnx + 1) = x^x(lnx + 1)$$

示例4：(x^n)′

根据幂函数求导公式，(x^n)′ = nx^{n-1}，现在使用对数转换对其求解：

$$x^n = e^{lnx^n} = e^{nlnx}$$

$$(x^n)' = (e^{nlnx})' = \frac{d(e^{nlnx})}{d(nlnx)} \cdot \frac{d(nlnx)}{dx} = e^{nlnx}\frac{n}{x} = x^n\frac{n}{x} = nx^{n-1}$$

也可以使用对数微分法求解：

$$u = x^n => lnu = lnx^n = nlnx$$

$$(lnu)' = (nlnx)'$$

$$u'/u = n/x$$

$$u' = \frac{un}{x} = \frac{x^n n}{x} = nx^{n-1}$$

示例5：(lnsecx)′

(lnsecx)′ = (secx)′ /secx = secxtanx/secx = tanx

e的真相

先来看一个极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = ?$$

这下麻烦了，似乎没有办法直接求解。然而数学的魅力就在于化繁为简，化不可能为可能。暂且抛开lim，并使用对数转换(1+1/x)^x：

$$ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$let\ \Delta x = \frac{1}{x},\ then\ xln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{ln(1+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$ln1 = 0,\ \frac{ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{ln(1+\Delta x) - ln1}{\Delta x}$$

$$当x \to \infty 时，\Delta x \to 0，$$

$$\lim_{x\to\infty} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{ln(1+\Delta x) - ln1}{\Delta x} = \frac{d(lnx)}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{x}\bigg|_{x=1} = 1$$

$So:$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^1 = e$$

由此得出结论：

$$\mathrm{e} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2.71828$$

总结

1. $(e^x)'$ = e，e^x在x=0处的导数是1
2. 指数函数的导数 $(a^x)' = a^x \ln a$
3. $(\ln x)' = 1/x$
4. 对数微分法，$(\ln u)' = u'/u$
5. $$\mathrm{e} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2.71828$$

出处：微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”

随笔

分类: 单变量微积分

标签: 导数, 指数行数的导数, 对数函数的导数, 自然对数

« 上一篇： FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集
» 下一篇： 单变量微积分笔记6——线性近似和二阶近似