

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

- 博客园
- 首页
- 新随笔
- 联系
- 订阅
- 管理

< 2022年3月 >

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称: 我是8位的
 园龄: 4年7个月
 粉丝: 288
 关注: 5
 +加关注

盖楼抽奖
 #她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
 分享最打动你的科技女性故事
 活动时间: 2022年3月8日-3月18日
 马上参与

搜索

常用链接

- 我的随笔
- 我的评论
- 我的参与
- 最新评论
- 我的标签

积分与排名

积分 - 457097
 排名 - 1198

单变量微积分笔记5——导数5 (指数函数和对数函数的导数)

指数函数的性质

先来复习一下中学的课程:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n (a > 0, m, n \in \mathbf{R})$$

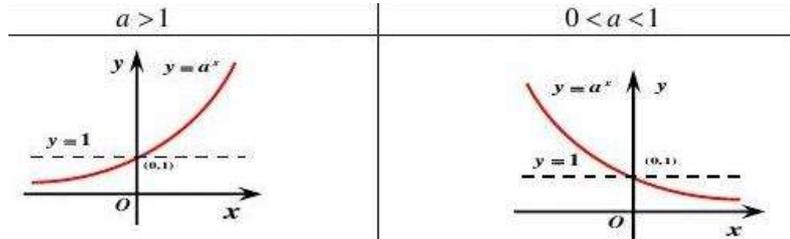
$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} (a > 0, m, n \in \mathbf{R})$$

$$(a^m)^n = a^{mn} (a > 0, m, n \in \mathbf{R})$$

$$(ab)^n = a^n b^n (a, b > 0, n \in \mathbf{R})$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}, n > 1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}, n > 1)$$



指数函数的导数

对 $f(x) = a^x$ 求导:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

a^x 右侧的那个极限似乎没有办法继续简化了, 如果这个极限看作关于 a 的函数 (之所以将极限看作关于 a 的函数, 是因为在这个极限中, a 是未知的, Δx 是已知的):

$$M(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}, \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = a^x M(a) \quad (1)$$

当 $x=0$ 时,

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = a^0 M(a) = M(a) \quad (2)$$

函数在某一点导数的几何意义是该点处切线的斜率, 所以 $M(a)$ 也就是 ax 在 $x=0$ 处切线的斜率。

如果 $y=2^x$, 则 $\frac{d}{dx} 2^x \Big|_{x=0} = M(2)$, 我们仍不知道 $M(a)$ 是什么, 暂且作为悬念。

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

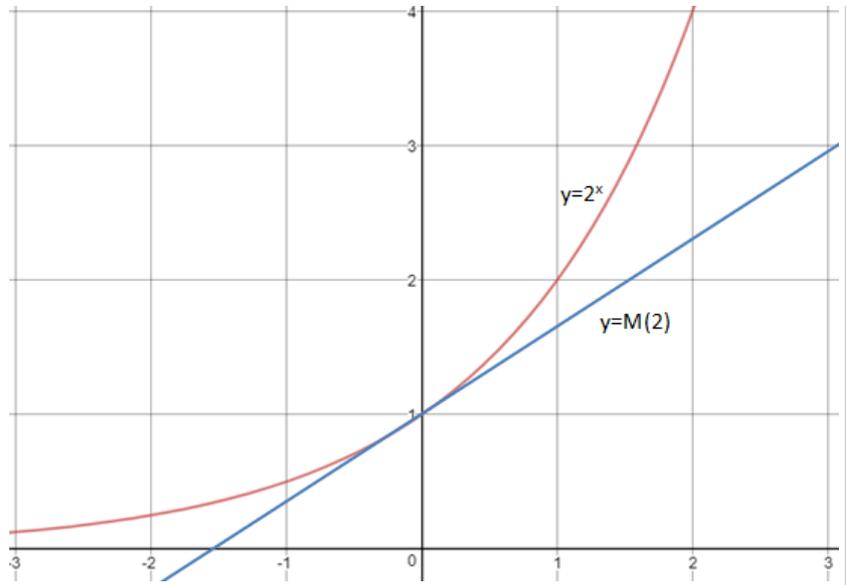
1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

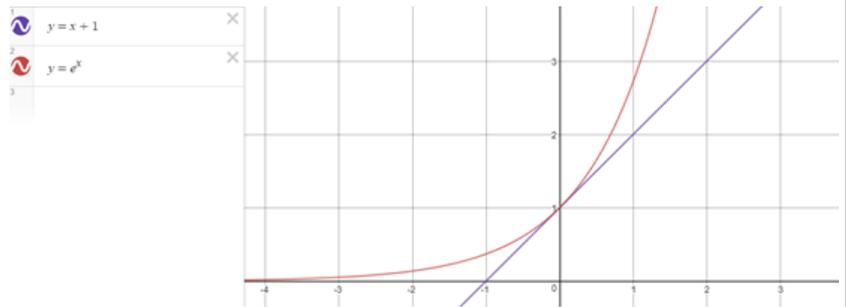
1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人



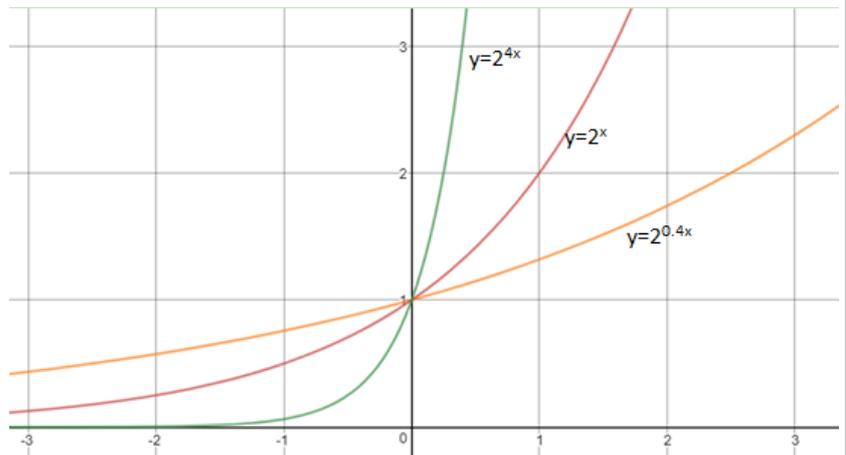
e

我们知道e表示自然对数的底数, 暂且不管自然对数到底是什么, 只知道它确实存在。e有两个性质:

- 1) $(e^x)' = e^x$
- 2) e^x 在 $x=0$ 的导数是1



当我们想要继续对 $f(kx)=2^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$ 求导时, 根据上节的公式 (2), $\frac{d}{dx} 2^{kx} |_{x=0} = M(2^k)$, 这并没有解决问题, 看起来更复杂了。如果已知函数某一点的导数, 就能求得该函数压缩或伸展后在该点的导数, 2^{kx} 仅仅是 2^x 的压缩或伸展, 在 $x=0$ 处的斜率也不断向左或向右倾斜:



2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)

很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

对 $f(kx) = 2^{kx}$ 求导，令 $b = 2^k$ ，则 $f(kx) = b^x$ ；根据链式求导法则， $u = kx, y = 2^u$

$$\frac{db^x}{dx} = \frac{df(kx)}{dx} = (kx)'(2^u)' = k(2^u)'$$

根据上节的公式 (1)， $(2^u)' = 2^u M(2) = 2^{kx} M(2)$ ，代入得：

$$\begin{aligned} \frac{db^x}{dx} &= k 2^{kx} M(2) \\ \frac{db^x}{dx} \Big|_{x=0} &= k 2^{k \times 0} M(2) = k M(2) \end{aligned}$$

当 $k=1/M(2)$ 时， (b^x) 在 $x=0$ 处的导数是1， $b = e$ ，虽然暂时不知道它的值，但已经知道它确实存在。

对数的性质

性质一 $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

性质二 $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

性质三 $\log_a a^M = M$

性质四 $a^{\log_a M} = M$ } 延伸 $a^{\log_a M} = \log_a a^M$

性质五 $\log_a M^N = N \log_a M$

性质六 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\lg b}{\lg a}$ 对数的换底性质

性质七 $\log_{a^M} b^N = \frac{N}{M} \log_a b$

性质八 $\log_{\frac{1}{a}} b = \log_a \frac{1}{b}$ 延伸 $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_a b$

(1) 常用对数: $\lg(b) = \log_{10} b$ (10为底数)

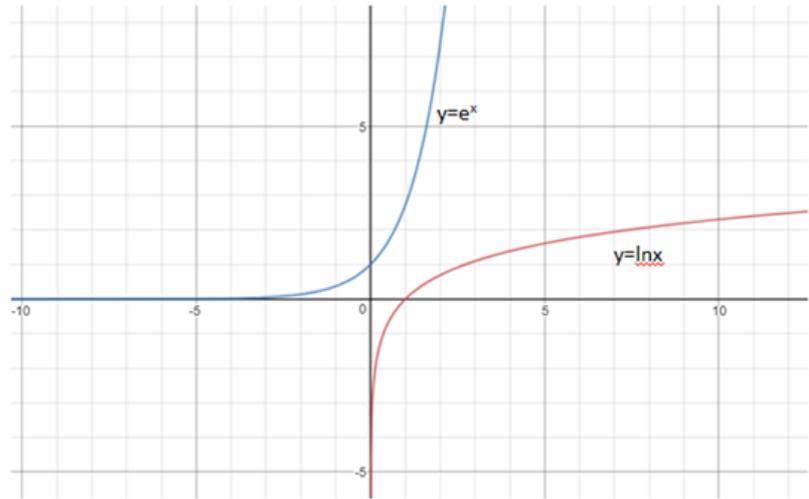
(2) 自然对数: $\ln(b) = \log_e b$ (e为底数)

自然对数的导数

自然对数是以e为底的对数，简写做ln

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$y = \ln e$ 和 $y = e^x$ 互为反函数:



Inx求导

对于函数 $y = \ln x$, 其反函数是 $e^y = x$, 根据反函数微分法:

$$\frac{de^y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = x'$$

$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

M(a)的真相

已经做了足够多的准备工作, 是时候揭开M(a)的真相了。

在对指数函数 $y = a^x$ 求导时, 我们得出 $(a^x)' = a^x M(a)$ 。根据对数的性质, $e^{\ln a} = a$, 原函数需要使用对数进行一次变换:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = a^x M(a)$$

根据链式求导法则,

$$(e^{x \ln a})' = \frac{de^{x \ln a}}{d(x \ln a)} \cdot \frac{d(x \ln a)}{dx} = e^u (\ln a) = e^{x \ln a} (\ln a) = a^x (\ln a)$$

所以, $M(a) = \ln(a)$

指数函数的求导公式

由于已经知道了M(a), 所以我们终于可以完成对指数函数的求导了。

对数函数求导公式: $(a^x)' = a^x \ln a$

示例:

$$(10^x)' = 10^x \ln 10, \quad (2^x)' = 2^x \ln 2$$

对数微分法

自然对数求导公式: $(\ln u)' = u' / u$, u 是 x 的函数

根据该公式, $(\ln x)' = x' / x = 1/x$

示例1: $(\ln x)' = x' / x = 1/x$

示例2: $(\ln a^x)' = (a^x)' / a^x = (a^x \ln a) / a^x = \ln a$

示例3: $(x^x)'$

这个稍微复杂点，不能直接用指数函数求导法则，因为指数也是x，此时需要使用对数做一次转换。

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x = x \ln x$$

$$(\ln y)' = (x(\ln x))'$$

$$\frac{y'}{y} = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1$$

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

示例4: $(x^n)'$

根据幂函数求导公式， $(x^n)' = nx^{n-1}$ ，现在使用对数转换对其求解：

$$x^n = e^{\ln x^n} = e^{n \ln x}$$

$$(x^n)' = (e^{n \ln x})' = \frac{d(e^{n \ln x})}{d(n \ln x)} \cdot \frac{d(n \ln x)}{dx} = e^{n \ln x} \frac{n}{x} = x^n \frac{n}{x} = nx^{n-1}$$

也可以使用对数微分法求解：

$$u = x^n \Rightarrow \ln u = \ln x^n = n \ln x$$

$$(\ln u)' = (n \ln x)'$$

$$u'/u = n/x$$

$$u' = \frac{un}{x} = \frac{x^n n}{x} = nx^{n-1}$$

示例5: $(\ln \sec x)'$

$$(\ln \sec x)' = (\sec x)' / \sec x = \sec x \tan x / \sec x = \tan x$$

e的真相

先来看一个极限：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$$

这下麻烦了，似乎没有办法直接求解。然而数学的魅力就在于化繁为简，化不可能为可能。暂且抛开lim，并使用对数转换 $(1+1/x)^x$ ：

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{let } \Delta x = \frac{1}{x}, \text{ then } x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\ln 1 = 0, \quad \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\ln(1 + \Delta x) - \ln 1}{\Delta x}$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \Delta x) - \ln 1}{\Delta x} = \left. \frac{d(\ln x)}{dx} \right|_{x=1} = \left. \frac{1}{x} \right|_{x=1} = 1$$

So:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^1 = e$$

由此得出结论:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2.71828$$

总结

1. $(e^x)' = e^x$, e^x 在 $x=0$ 处的导数是1
2. 指数函数的导数 $(a^x)' = a^x \ln a$
3. $(\ln x)' = 1/x$
4. 对数微分法, $(\ln u)' = u' / u$

5. $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2.71828$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [导数](#), [指数函数的导数](#), [对数函数的导数](#), [自然对数](#)

好文要顶 关注我 收藏该文  

 我是8位的
 关注 - 5
 粉丝 - 288
 +加关注

0 0
 推荐 反对

« 上一篇: [FP-growth算法发现频繁项集 \(二\) ——发现频繁项集](#)
 » 下一篇: [单变量微积分笔记6——线性近似和二阶近似](#)

posted on 2017-09-11 10:37 我是8位的 阅读(10127) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

针对亚州优化的高速梯子

针对大陆优化的高速线路

bitznet.app

打开

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
 活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes